УДК 517.518.24

СОВМЕСТНЫЙ МОДУЛЬ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ И УСЛОВНО РЕГУЛЯРНЫЙ ПРИНЦИП ВЫБОРА

С.А. Чистякова[1], В.В. Чистяков[2]

1 *schistyakova@hse.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород
2 *vchistyakov@hse.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

Для отрезка $I = [a, b]$ и метрического пространства (M, d) на множестве M^I всех функций, действующих из I в M, определяется неубывающая последовательность псевдометрик $\{\nu_n\}$, называемая совместным модулем вариации. Показано, что если две последовательности функций $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$ из M^I такие, что $\{f_j\}$ поточечно относительно компактна на I, $\{g_j\}$ поточечно сходящаяся на I и $\limsup_{j\to\infty} \nu_n(f_j, g_j) = o(n)$ при $n \to \infty$, то $\{f_j\}$ содержит поточечно сходящуюся на I подпоследовательность, предел которой является условно регулярной функцией.

Ключевые слова: метрическое пространство, совместный модуль вариации, поточечная сходимость, принцип выбора, регулярная функция, обобщенная вариация.

Классическим результатом теории функций вещественной переменной является следующий *принцип выбора Э. Хелли* (1912): *равномерно ограниченная последовательность вещественных неубывающих функций на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность.* Эта теорема обобщалась в различных направлениях (в основном для функций ограниченной и обобщенной ограниченной вариации) в работах [2, 8, 10–13] и др.

Цель настоящей работы — представить новое достаточное условие (заменяющее условие ограниченности обобщенных вариаций) для существования поточечно сходящейся подпоследовательности в контексте пространства M^I функций вида $f : I = [a, b] \to M$, где M — метрическое пространство с метрикой d. Это условие базируется на понятии *совместного модуля вариации двух функций* $f, g \in M^I$, развивающем понятие модуля вариации (=модуля изменения) одной функции [1] (также [3–5]).

Совместным приращением двух функций $f, g \in M^I$ на двухточечном множестве $\{s, t\} \subset I$ называется (всегда конечная) величина ([6])

$$|(f, g)(\{s, t\})| = \sup_{z\in M} \Big| d(f(s), z) + d(g(t), z) - d(f(t), z) - d(g(s), z)\Big|.$$

Если $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_i\}_{i=1}^n$ — набор из n двухточечных множеств $I_i = \{s_i, t_i\} \subset I$, то для краткости пишем $\{I_i\}_{i=1}^n \prec I$, если $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_{n-1} < t_{n-1} \le s_n < t_n$ (так что отрезки $[s_1, t_1], \ldots, [s_n, t_n]$ не налегают друг на друга). Набор $\{I_i\}_{i=1}^n \prec I$ называем *разбиением* отрезка I, если $t_0 := s_1$ и $s_i = t_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, что обозначается через $\{t_i\}_{i=0}^n \prec I$.

Совместным модулем вариации двух функций $f, g \in M^I$ называется последовательность $\{\nu_n(f,g)\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty]$, определяемая для всех $n \in \mathbb{N}$ правилом ([6]):

$$\nu_n(f,g) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n |(f,g)(I_i)| : \{I_i\}_{i=1}^n \prec I\Big\}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ функция ν_n является (расширенной) *псевдометрикой* на M^I, т.е. $\nu_n(f,f)=0$, $\nu_n(f,g)=\nu_n(g,f)$ и $\nu_n(f,g) \le \nu_n(f,h)+\nu_n(h,g)$ для всех $f,g,h \in M^I$. Кроме того, для всех $f,g \in M^I$ последовательность $\{\nu_n(f,g)\}_{n=1}^\infty$ не убывает, $\nu_1(f,g) \le \nu_n(f,g) \le n\nu_1(f,g)$ и $\nu_{n+m}(f,g) \le \nu_n(f,g)+\nu_m(f,g)$ для всех $n,m \in \mathbb{N}$. Таким образом, если $\nu_1(f,g)$ конечно (например, когда f и g ограничены), то существует $\lim_{n\to\infty} \nu_n(f,g)/n \in [0,\infty)$.

Для последовательности функций $\{f_j\} \equiv \{f_j\}_{j=1}^\infty \subset M^I$ и $f \in M^I$ обозначаем через $f_j \to f$ на I *поточечную сходимость* $\{f_j\}$ к f, т.е. $\lim_{j\to\infty} d(f_j(t), f(t)) = 0$ $\forall\, t \in I$, и через $f_j \rightrightarrows f$ на I *равномерную сходимость* $\{f_j\}$ к f, т.е. $\lim_{j\to\infty} d_\infty(f_j,f)=0$, где (расширенная) равномерная метрика d_∞ на M^I задается правилом $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in I} d(f(t),g(t))$.

Если теперь $n \in \mathbb{N}$, $f,g \in M^I$ и $\{f_j\}, \{g_j\} \subset M^I$ такие, что $f_j \to f$ и $g_j \to g$ (соотв. $f_j \rightrightarrows f$ и $g_j \rightrightarrows g$) на I, то $\nu_n(f,g) \le \liminf_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j)$ (соотв. $\nu_n(f,g) = \lim_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j)$).

Основной результат работы — следующий *поточечный принцип выбора* [6, Theorem 1] (запись вида $\mu_n = o(n)$ в нем означает, как обычно, что $\lim_{n\to\infty}\mu_n/n = 0$):

Теорема 1. *Пусть две последовательности функций* $\{f_j\}, \{g_j\} \subset M^I$ *— такие, что*

(а) *при любом* $t \in I$ *замыкание в* M *множества* $\{f_j(t) : j \in \mathbb{N}\}$ *компактно*;

(б) $g_j \to g$ *на* I *для некоторой функции* $g \in M^I$;

(в) $\mu_n := \limsup_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j) = o(n)$.

Тогда $\{f_j\}$ *содержит подпоследовательность, которая поточечно сходится на* I *к некоторой функции* $f \in M^I$ *такой, что* $\nu_n(f,g) \le \mu_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Приведем некоторые комментарии и следствия. Всюду ниже символ c означает любую постоянную функцию $c : I \to M$.

1. Условие (в) в теореме 1 не является необходимым в случае поточечно сходящихся последовательностей $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$, но оно является *необходимым* для равномерно сходящихся последовательностей: действительно, если $f_j \rightrightarrows f$ и $g_j \rightrightarrows g$ на I, причем $\nu_n(f,g) = o(n)$, то $\lim_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j) = \nu_n(f,g) = o(n)$.

Условие (в) в теореме 1 не инвариантно относительно эквивалентных (в топологическом смысле) метрик d на M; более того, оно может не иметь места ни для какой эквивалентной метрики на M, относительно которой последовательность $\{f_j\} \subset M^I$ поточечно сходится на I даже в случае, когда все $g_j = c$ (подробнее см. [6]).

2. Для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in M^I$ величина $\nu_n(f) \equiv \nu_n(f,c)$ не зависит от c и имеет вид

$$\nu_n(f) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^n d(f(s_i), f(t_i)) : \{I_i\}_{i=1}^n \prec I, \text{ где } I_i = \{s_i, t_i\}\Big\}.$$

Последовательность $\{\nu_n(f)\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty]$ известна как *модуль вариации* функции f в смысле [1]. Она характеризует регулярные функции из M^I следующим образом. Скажем, что $f \in M^I$ *регулярна* и запишем $f \in \mathrm{Reg}(I;M)$, если $d(f(s),f(t)) \to 0$ при

$s, t \to \tau - 0$ для всех $a < \tau \le b$ и при $s, t \to \tau' + 0$ для всех $a \le \tau' < b$ (по критерию Коши в случае полного M это эквивалентно существованию односторонних пределов $f(\tau - 0), f(\tau' + 0) \in M$). Имеем $\mathrm{Reg}(I; M) = \{f \in M^I : \nu_n(f) = o(n)\}$ (см. [1, 3–5]).

Полагая в теореме 1 $g_j = c$ для всех $j \in \mathbb{N}$, получаем принципы выбора из [3–5].

3. Поскольку ν_n — псевдометрика на M^I, то на M^I можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ правилом: $f \sim g$, если $\nu_n(f, g) = o(n)$, где $f, g \in M^I$. Класс эквивалентности $\mathrm{R}(g) = \{f \in M^I : f \sim g\}$ называется классом *условной регулярности* функции $g \in M^I$, а любая функция $f \in \mathrm{R}(g)$ называется *g-регулярной*. Отметим, что условие '$\nu_n(f, g) \le \mu_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$' в теореме 1 означает, что f является g-регулярной. Кроме того, $\mathrm{Reg}(I; M) = \mathrm{R}(c)$.

Основные свойства класса $\mathrm{R}(g)$: (1) если $g \in M^I$ ограничена, то все функции из $\mathrm{R}(g)$ ограничены; (2) $\mathrm{R}(g)$ замкнут относительно равномерной сходимости (но не относительно поточечной сходимости); (3) если (M, d) полное, то $(\mathrm{R}(g), d_\infty)$ также полное.

4. Классическая *жорданова вариация* функции $f \in M^I$ есть

$$V(f) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i), f(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N} \text{ и } \{t_i\}_{i=0}^{n} \prec I\Big\} = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f).$$

Полагая $\mathrm{BV}(I; M) = \{f \in M^I : V(f) < \infty\}$, для $f \in \mathrm{BV}(I; M)$ найдем, что $\nu_1(f) \le V(f)$ и $\nu_n(f)/n \le V(f)/n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. f ограничена и $f \in \mathrm{Reg}(I; M)$.

Альтернативное описание класса $\mathrm{Reg}(I; M)$ опирается на понятие *ε-вариации* $V_\varepsilon(f)$ функции $f \in M^I$, введенное в [8]:

$$V_\varepsilon(f) = \inf\{V(g) : g \in \mathrm{BV}(I; M) \text{ и } d_\infty(f, g) \le \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (\inf \varnothing = \infty).$$

Имеем $\mathrm{Reg}(I; M) = \{f \in M^I : V_\varepsilon(f) < \infty$ для всех $\varepsilon > 0\}$. Например, если $x, y \in M$, $x \ne y$, и функция типа Дирихле $f \equiv \mathscr{D}_{x,y} : [0,1] \to M$ определена правилом: $f(t) = x$, если $t \in [0,1]$ рационально, и $f(t) = y$ для иррациональных $t \in [0,1]$, то $f \notin \mathrm{Reg}(I; M)$, $V_\varepsilon(f) = \infty$ при $0 < \varepsilon < d(x, y)/2$ и $V_\varepsilon(f) = 0$ при $\varepsilon \ge d(x, y)$.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема ([6, Theorem 3]):

Теорема 2. *Пусть последовательность функций $\{f_j\} \subset M^I$ — такая, что*

(а) *при любом $t \in I$ замыкание в M множества $\{f_j(t) : j \in \mathbb{N}\}$ компактно*;

(б) $\limsup_{j\to\infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ *для всех $\varepsilon > 0$.*

Тогда существует подпоследовательность в $\{f_j\}$, которая поточечно сходится на I к некоторой функции $f \in \mathrm{Reg}(I; M)$.

5. Теорема 1 содержит в качестве частных случаев все принципы выбора, цитированные выше, и в отличие от них может быть применена к последовательностям нерегулярных функций. Пусть, например, последовательности $\{x_j\}$ и $\{y_j\} \subset M$ сходятся в M к x и $y \in M$ соответственно, где $x \ne y$. Тогда последовательность функций типа Дирихле $f_j = \mathscr{D}_{x_j, y_j}$, $j \in \mathbb{N}$, сходится поточечно на $I = [0,1]$ к функции $f = \mathscr{D}_{x,y}$. Полагая $g_j = f = \mathscr{D}_{x,y}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ в теореме 1, найдем, что для любых $s, t \in I$

$$|(f_j, g_j)(\{s, t\})| \le d(f_j(s), g_j(s)) + d(f_j(t), g_j(t)) \le 2\varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j := \max\{d(x_j, x), d(y_j, y)\} \to 0$ при $j \to \infty$. Отсюда вытекает, что $\nu_n(f_j, g_j) \le 2n\varepsilon_j$, а потому, условие (в) теоремы 1 выполняется.

6. Сравнение различных принципов выбора приведено в работе [9].

7. Следуя методологии [7] (где вместо теоремы Хелли используется теорема Рамсэя из формальной логики), можно показать, что *если* $\{f_j\} \subset M^I$ *удовлетворяет условию* (a) *теоремы* 1 *и* $\lim_{N\to\infty}\sup_{j,k\geq N}\nu_n(f_j, f_k) = o(n)$, *то* $\{f_j\}$ *содержит подпоследовательность, сходящуюся поточечно на* I (к какой-либо регулярной или нерегулярной функции).

Литература

1. Чантурия З. А. *Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье* // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 1. – С. 63–66.

2. Chistyakov V. V. *Selections of bounded variation* // J. Appl. Anal. – 2004. – V. 10. – P. 1–82.

3. Chistyakov V. V. *The optimal form of selection principles for functions of a real variable* // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – V. 310. – P. 609–625.

4. Chistyakov V. V. *A selection principle for functions of a real variable* // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia. – 2005. – V. 53. – P. 25–43.

5. Чистяков В. В. *Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве* // Матем. труды (Новосибирск). – 2006. – Т. 9. – № 1. – Р. 176–204.

6. Chistyakov V. V., Chistyakova S. A. *The joint modulus of variation of metric space valued functions and pointwise selection principles* // Studia Math. – 2017. – V. 238. – P. 37–57.

7. Chistyakov V. V., Maniscalco C. *A pointwise selection principle for metric semigroup valued functions* // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 341. – № 1. – P. 613–625.

8. Fraňková D. *Regulated functions* // Math. Bohem. – 1991. – V. 116. – P. 20–59.

9. Maniscalco C. *A comparison of three recent selection theorems* // Math. Bohem. – 2007. – V. 132. – P. 177–183.

10. Korenblum B. *A generalization of two classical convergence tests for Fourier series, and some new Banach spaces of functions* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) – 1983. – V. 9. – P. 215–218.

11. Musielak J., Orlicz W. *On generalized variations (I)* // Studia Math. – 1959. – V. 18. – P. 11–41.

12. Schrader K. *A generalization of the Helly selection theorem* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 78. – P. 415–419.

13. Waterman D. *On Λ-bounded variation* // Studia Math. – 1976. – V. 57. – P. 33–45.

THE JOINT MODULUS OF VARIATION OF FUNCTIONS AND CONDITIONALLY REGULAR SELECTION PRINCIPLE

S.A. Chistyakova, V.V. Chistyakov

Given a closed interval $I = [a, b]$ *and a metric space* (M, d)*, we introduce a nondecreasing sequence* $\{\nu_n\}$ *of pseudometrics on* M^I *(the set of all functions from I into M), called the joint modulus of variation. We show that if two sequences of functions* $\{f_j\}$ *and* $\{g_j\}$ *from* M^I *are such that* $\{f_j\}$ *is pointwise relatively compact on* I*,* $\{g_j\}$ *is pointwise convergent on* I*, and* $\limsup_{j\to\infty}\nu_n(f_j, g_j) = o(n)$ *as* $n\to\infty$*, then* $\{f_j\}$ *admits a pointwise convergent subsequence whose limit on* I *is a conditionally regulated function.*

Keywords: metric space, joint modulus of variation, pointwise convergence, selection principle, regulated function, generalized variation.